Marko Đukanović

Prirodno-matematički fakultet Banja Luka

# Jedan algoritam za konstrukciju generalizovane anti-Gausove kvadrature

# Oznake:

$\omega$- nenegativna integrabilna funkcija na [a,b];
$If := \int_a^b f(\lambda) d\omega(\lambda)$;
$G_\omega^{(n)} = \sum_{j=1}^n \omega_j^{(n)} f(\lambda_j^{(n)})$ -n-ta Gausova kvadratura odgovarajuće težinske funkcije $\omega$;
$p_j$- $j$-ti monični ortogonalni polinom odgovarajuće težinske funkcije $\omega$ generisan 3-članom rekurzijom

$$p_{-1} = 0,\ p_0 = 1$$

$$p_{j+1} = (\lambda - a_j)p_j - b_j p_{j-1},\, a_j \in \mathbb{R},\, b_j \geq 0;$$

$\mathrm{T}_n = \begin{pmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & & \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{b_{n-1}} \\ & & \sqrt{b_{n-1}} & a_{n-1} \end{pmatrix}$ - Jakobijava matrica asocirana sa prvih $n$ polinoma $\{p_j\}_{j\in\mathbb{N}}$;

$E_\omega^n = If - G_\omega^{(n)}$- greška $n$-te Gausove kvadrature.

### Teorema

*Neka su* $\{\theta_j^{(n)}\}_{j=1}^n$ *svojstvene vrijednosti, a* $\{z_j^{(n)}\}_{j=1}^n$ *odgovaraući normirani svojstveni vekori matrice* $T_n$*. Tada vrijedi:*

- $\lambda_j^{(n)} = \theta_j,\ j = 1, ..., n$
- $\omega_j^{(n)} = (z_j^{(n)}, e_1)^2,\ j = 1, ..., n$

### Teorema

*Algebarski stepen Gausove kvadrature je* $2n-1$*, tj.* $Ip = G_\omega^{(n)} p$ *za sve* $p \in P_{2n-1}$

# Konstrukcija anti-Gausove kvadrature

Kostruisao Laurie 1996.
Ideja: Naći kvadraturu $n+1$-vog stepena $A_{n+1}^{(1)}$ suprotne veličinom greške u odnosu na $G_\omega^{(n)}$ na prostoru polinoma stepena ne većeg od $2n+1$, ili simbolički:

$$If - A_{n+1}^{(1)} f = -(If - G_\omega^{(n)} f),\ f \in P_{2n+1}$$

Sređivanjem izraza dobijamo:

$$A_{n+1}^{(1)} f = (2I - G_\omega^{(n)}) f,\ f \in P_{2n+1}$$

Zaključujemo: $A_{n+1}^{(1)}$ je $(n+1)$- čvorna kvadratura za linearni funkcional

$$2I - G_\omega^{(n)}.$$

Uz pretpostavku da je funkcional $2I - G_{\omega}^{(n)}$ pozitivno definitan, označimo niz ortogonalnih polinoma u odnosu na njega sa $\{\pi_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Tada se $\pi_{n+1}$ može predstaviti 3-članom rekurzijom:

$$\pi_{-1} = 0,\ \pi_0 = 1$$

$$\pi_{n+1} = (\lambda - \alpha_n)\pi_n - \beta_n\pi_{n-1}, \alpha_n \in \mathbb{R},\ \beta_n \geq 0$$

Laurie je pokazao da vrijedi $\pi_i = p_i$ za $i \in \{0, 1, ..., n\}$, dok za $\pi_{n+1}$ imamo $\alpha_n = a_n$ i $\beta_n = 2b_n$.

Pripadna Jakobijeva matrica rekurzije je:

$$T_{n+1}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & & & \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{b_{n-1}} & \\ & & \sqrt{b_{n-1}} & a_{n-1} & \sqrt{2}\sqrt{b_n} \\ & & & \sqrt{2}\sqrt{b_n} & a_n \end{pmatrix}$$

odakle je određena $A_{n+1}^{(1)}$.

# Konstrukcija generalizovanih anti- Gaus kvadratura

Opisana u radu Pranića i Reichel-a 2014(PR14).

Za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$ posmatra se $(n+k)$- čvorna kvadratura $A_{n+k}^{(k)}$ za koju vrijedi:

$$If - A_{n+k}^{(k)} f = -(If - G_\omega^{(n)} f)\,,\ \forall f \in P_{2n+2k-1}$$

Sređivanjem dobijamo da je

$$A_{n+k}^{(k)} f = (2I - G_\omega^{(n)}) f\,,\ \forall f \in P_{2n+2k-1}$$

U radu PR14 dati su koeficijenti ortogonalnih polinoma $\pi_i$ koje generiše funkcional $2I - G_\omega^{(n)}$ za $k \in \{2,3\}$ u egzaktnom obliku.

Pokazano je:
Za $k = 2$: Uz pretpostavku da je $\beta_{n+1} \neq 0$ vrijedi
$\alpha_{n+1} = \frac{a_{n+1}b_{n+1} - a_{n-1}b_n}{\beta_{n+1}}$, $\beta_{n+1} = b_{n+1} - b_n$
Za $k = 3$: Uz pretpostavku da je $\beta_{n+1}\beta_{n+2} \neq 0$ vrijedi:

$$\beta_{n+2} = \frac{(b_{n+2}b_{n+1} - b_n b_{n-1}) - b_{n+1}b_n(a_{n+1} - a_{n-1})^2}{\beta_{n+1}^2}$$

$$\alpha_{n+2} = \frac{b_{n+2}b_{n+1}(a_{n+2} + 2a_{n+1} - 2\alpha_{n+1}) + b_n b_{n-1}(2\alpha_{n+1} - 2a_{n-1} - a_{n-2})}{\beta_{n+2}\beta n+1} + \frac{a_{n+1}b_{n+1}(a_{n+1} - \alpha_{n+1})^2 - a_{n-1}b_n(a_{n-1} - \alpha_{n+1})^2}{\beta_{n+2}\beta n+1}$$

Slično kao i za $k = 1$ generišemo AG kvadrature za $k = 2, 3$.
Kako se $k$ povećava egzaktan izraz za $\alpha_{n+k}$ postaje sve komplikovaniji.
Ideju numeričkog načina konstrukcije generalizovane anti-Gaus kvadrature baziramo na upotrebi modifikovanog Čebiševljevog algoritma(MCA).

# Modifikovani Čebiševljev algoritam(MCA)

Neka je data druga težinska funkcija $d\lambda$. Algoritam se primjenjuje na bilo koji sistem moničnih polinoma koji zadovoljava 3-članu rekurziju

$$p_{-1} = 0, p_0 = 1$$

$$p_{k+1} = (\lambda - a_k)p_k - b_k p_{k-1}\ , a_k \in \mathbb{R},\ b_k \geq 0.$$

Definišimo uopšteni $r$-ti momenat sa $m_r = \int_a^b p_r(t) d\lambda(t)$.
Algoritam iz niza momenata $m = \{m_k\}_{k=0}^{2n-1}$ , $\{a_k\}_{k=0}^{2n-2}$, $\{b_k\}_{k=0}^{2n-2}$ generiše koeficijente moničnih ortogonalnih polinoma $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n-1}, \{\beta_i\}_{i=0}^{n-1}$ u odnosu na datu mjeru $d\lambda$.
Uzimajući $a_k = b_k = 0$ dobijamo "originalni" Čebiševljev algoritam.

Definišimo "mješovite momente" sa

$$\sigma_{kl} = \int_a^b \pi_l(t) p_k(t) d\lambda(t), \; k, l \geq -1$$

Zbog ortogonalnosti je $\sigma_{kl} = 0$ za $k > l$.
Kako je $tp_{k-1} = \pi_k + q_{n-1}$, gdje $q_{n-1} \in P_{n-1}$ onda vrijedi:

$$\int_a^b \pi_k^2(t) d\lambda(t) = \int_a^b \pi_k t p_{k-1} d\lambda(t) = \sigma_{kk}, \; k > 1$$

Takođe vrijedi:

$$\begin{aligned} 0 = \sigma_{k+1,k-1} &= \int_a^b [(t-\alpha_k)\pi_k - \beta_k \pi_{k-1}] p_{k-1} d\lambda(t) \\ &= \alpha_k \sigma_{k,k} - \beta_k \sigma_{k-1,k-1}. \end{aligned}$$

Odavde je $\beta_k = \frac{\sigma_{k,k}}{\sigma_{k-1,k-1}}$ (1)
Definišimo $\beta_0 = \int_a^b \lambda(t) = m_0$.

Slično iz $\sigma_{k+1,k} = 0$ dobijamo:

$$0 = \int_a^b [(t - \alpha_k)\pi_k - \beta_k \pi_{k-1}] p_k =$$

$$\int_a^b t\pi_k(t) p_k(t) d\lambda(t) - \alpha_k \sigma_{k,k} - \beta_k \sigma_{k-1,k}$$

$tp_k$ u zadnjoj jednakosti mijenjamo sa

$$tp_k = p_{k+1} + a_k p_k + b_k p_{k-1}$$

odakle dobijamo:

$$0 = \sigma_{k,k+1} + (a_k - \alpha_k)\sigma_{kk} + \beta_k \sigma_{k-1,k} \quad (2)$$

Kombinujući (1) u (2) i stavljajući da je $\sigma_{-1l} = 0$, imamo:

$$\alpha_0 = a_0 + \frac{\sigma_{01}}{\sigma_{00}}$$

$$\alpha_k = a_k + \frac{\sigma_{k-1,k}}{\sigma_{k-1,k-1}} + \frac{\sigma_{k,k+1}}{\sigma_{k,k}} \ \ k = 1, 2, ...$$

Iz prethodnog, rekurzija koje $\sigma$-e zadovoljavaju je:

$$\sigma_{k,l} = \sigma_{k-1,l+1} - (\alpha_{k-1} - \alpha_l)\sigma_{k-1,l} - \beta_{k-1}\sigma_{k-2,l} - b_l\sigma_{k-1,l-1}$$

**Algoritam**(eng. Modified Chebyshev algorithm)

$$\beta_0 = m_0$$
$$\sigma_{-1l} = 0, l = 1, 2, ..., 2n-2$$
$$\sigma_{0,l} = m_l, l = 0.1, ..., 2n-1$$
$$\alpha_0 = a_0 + \frac{\sigma_{01}}{\sigma_{00}}$$
$$for\ k = 1, 2, ..., n-1\ do$$
$$\sigma_{k,l} = \sigma_{k-1,l+1} - (\alpha_{k-1} - \alpha_l)\sigma_{k-1,l} -$$
$$-\beta_{k-1}\sigma_{k-2,l} - b_l\sigma_{k-1,l-1},\ l = k, k+1, ..., 2n-k-1$$
$$\alpha_k = a_k + \frac{\sigma_{k-1,k}}{\sigma_{k-1,k-1}} + \frac{\sigma_{k,k+1}}{\sigma_{k,k}}$$

# Primjena MCA na generisanje generalizovane AG kvadrature

Definišimo bilinearnu formu $(f,g)_\lambda := (2I - G_\omega^{(n)})(fg)$ prateći oznake u MCA. Za monične polinome biramo $p_k = t^k$, tj. $a_k = b_k = 0$ za $k = 0, 1, ..., 2n+2k-1$.
Generišemo prvih $2(n+k)$ momenata $\widetilde{m}_r = (2I - G_\omega^{(n)})(t^r)$.
Primjenom MCA na $\widetilde{m}_r$, $a_k$, $b_k$ generiše se $\alpha_k$, $\beta_k$ za $k = 0, 1, 2, ..., n+k-1$, a time i monične ortogonalne polinome $\pi_k$ za $k = 1, 2, ..., n+k$ u odnosu na funkcional $(2I - G_\omega^{(n)})$.
Na taj način se formira Jakobijeva matrica(realna ako je funkcional pozitivno definitan):

$$\mathrm{T}_{n+k}^{(k)} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n+k-1}} \\ & & \sqrt{\beta_{n+k-1}} & \alpha_{n+k-1} \end{pmatrix}, \text{ a iz nje i } A_{n+k}^{(k)}.$$

Težina koju smo odabrali u testiranju je klasična jakobijeva $(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$ na intervalu $[-1,1]$.
Algoritam koji koristi MCA je implementiran u Matlab-u. Softver primjenjen u $PR14$ koristi egzaktne formule za računanja koeficijenata $\alpha_{n+k}$ za $k \leq 3$ prezentovane u tom radu, generišući na taj način $A_{n+k}^{(k)}$.
Poredili smo rezultate softvera primjenjenog u $PR14$ sa softverom zasnovanim na MCA.

**Primjer**

*Rezultati testiranja za* $f(t) = \frac{e^t}{t+2}$ *sa jakobijevom težinom* $(1-x)^{0.7}(1+x)^{0.8}$ *data je sljedećom tabelom*

| $n$ | $k$ | * | ** |
|---|---|---|---|
| 5 | 1 | $-8.6354e^{-08}$ | $-1.2333e^{-07}$ |
| 5 | 2 | $-8.6414e^{-08}$ | $-1.2339e^{-07}$ |
| 5 | 3 | $-8.6435e^{-08}$ | $-1.2341e^{-07}$ |
| 5 | 4 | $-8.6435e^{-08}$ | – |
| 5 | 5 | $-8.6435e^{-08}$ | – |
| 5 | 6 | $-8.6435e^{-08}$ | – |
| 5 | 7 | $-8.6435e^{-08}$ | – |

* greške kvadrature generisane kodom koji koristi MCA
**greške kvadrature generisane kodom iz $PR14$

## Primjer

*Posmatrajmo* $f(t) = \frac{1}{(t-1.5)}$ *i težinsku funkciju* $(1-x)^{0.6}(1+x)$.

Rezultati testiranja:

| $n$ | $k$ | $*$ | $**$ |
|---|---|---|---|
| 15 | 1 | $-2.8775e^{-07}$ | $-1.6835e^{-07}$ |
| 15 | 2 | $-2.87750e^{-07}$ | $-1.6835e^{-07}$ |
| 15 | 3 | $-2.87750e^{-07}$ | $-1.6835e^{-07}$ |
| 15 | 4 | $-2.87750e^{-07}$ | $-$ |

* greške kvadrature generisane kodom koji koristi MCA

**greške kvadrature generisani kodom iz $PR14$

# Prednosti i mane konstrukcije generalizovanih AG kvadratura generisanih pomoću MCA

**Primjer**

*Posmatrajmo* $f(t) = \frac{t}{t^2+1.4}$ *sa težinskom funkcijom* $(1-t)(1+t)$

Rezultati testiranja su dati narednom tabelom:

| $n$ | $k$ | I-$\text{A}_{n+k}^{(k)}$ | I-$\text{G}_{\omega}^{(n)}$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 1 | $1.55484^{-16}$ | $5.8340e^{-17}$ |
| 3 | 2 | $3.7523e^{-17}$ | |
| 3 | 3 | $8.1352e^{-17}$ | |
| 3 | 4 | $8.0377e^{-17}$ | |
| 3 | 5 | $-8.4776e^{-17}$ | |

Iz rezultata zaključujemo da $If \in [G_3, A_8^{(5)}]$

Prednosti:

- Generišemo AG kvadraturu za proizvoljno $k$, što nije bio slučaj sa kodom u $PR14$(samo $k \leq 3$).
- Testiranja su pokazala da algoritam daje zadovoljavajuće rezutate sa ulazom od nekoliko desetina momenata.
- Nađeni su primjeri koji pokazuju korist definisanja generalizovanih AG kvadratura, konkretno u izolovanju intervala vrijednosti $If$.
- Generiše AG kvadratura za bilo koju težinsku funkciju.

Mane:

- U ulazu se zahtjeva računanje $2n$ momenata za generisanje polinoma $n$-tog stepena
- Za velike $n$ algoritam pokazuje nestablinost(anomalija oduzimanja približno sličnih brojeva u MCA??).
- Kompleksnost aritmetičkih operacija u MCA je $O(n^2)$.

Dalje istraživanje: Stabilizacija rezultata Matlabovim simboličkim računom(Symbolic Math Toolbox).

Hvala na pažnji

Pitanja???